# 1 Trigonometrické Fourierovy řady

Systém funkcí
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \quad n \in \mathbb{N}$$
tvoří úplnou ortonormální množinu v prostoru $L^2([-\pi,\pi])$ (pro funkce s reálnými i komplexními hodnotami). Obdobně pro komplexní $L^2([-\pi,\pi])$ použít systém
$$\frac{e^{nx}}{\sqrt{2\pi}}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Pro $f \in L^2([-\pi,\pi])$ položíme
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt, \quad n \in \mathbb{N}.$$
a pro $x \in [-\pi,\pi]$
$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx).$$

**Věta 40** (o stejnoměrné konvergenci Fourierovy řady)**.** *Nechť $f$ je $2\pi$-periodická spojitá funkce, která je po částech spojitě diferencovatelná. Potom*

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n| < \infty,$
2. *$s_n \rightrightarrows f$ na $[0,2\pi]$.*

**Poznámky a příklady.** *1. Pro obecnou periodu $L > 0$ pracujeme s ortogonální systémem*
$$1, \quad \cos\frac{2\pi nx}{L}, \quad \sin\frac{2\pi nx}{L}, \quad n \in \mathbb{N}$$

*2. Pokud je $f$ lichá, platí $a_n = 0$, $n \in \mathbb{N}_0$, pokud je $f$ sudá, platí $b_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$.*

*3. Prototyp Fourierovy řady pro nespojitou funkci: nechť $g$ je $2\pi$-periodická a $g(x) = \frac{x}{\pi}$, $x \in (-\pi, pi)$, potom*
$$g(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}.$$

*Dále*

*(a) řada konverguje bodově k průměru jednostranných limit (na $\mathbb{R}$),*

*(b) řada konverguje lokálně stejnoměrně na $(-\pi,\pi)$.*

4. *(věta o konvergenci Fourierovy řady k průměru) Nechť $f$ je $2\pi$-periodická funkce, která je po částech spojitě diferencovatelná. Potom*

   (a) $s_n \to \frac{f(x+)+f(x-)}{2}$,

   (b) *pokud je $f$ spojitá na $(\alpha, \beta)$, potom $s_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na $(\alpha, \beta)$.*

## 2 Funkce komplexní proměnné

Neformální úvod